

מתמטיקה למדעי החברה



תוכן העניינים

1.	מבוא מתמטי לקורס	1
2.	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)	2
3.	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות	30
4.	גבול של פונקציה	52
5.	חישוב נגזרת של פונקציה	58
6.	כלל לופיטל	71
7.	חקירת פונקציה	78
8.	אינטגרלים מיידיים	101
9.	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	104
10.	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	106
11.	אינטגרלים בשיטת ההצבה	110
12.	אינטגרלים של פונקציות רציונליות	113
13.	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)	118

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1	1. מבוא לתורת הקבוצות
7	2. המספרים האי-רציונליים
8	3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות
15	4. קבוצה צפופה
17	5. סימן הסכימה
20	6. אינדוקציה
22	7. אי שוויונים מפורסמים
23	8. פתרון אי שוויונים
25	9. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון
28	10. שדות

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

(9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

(10) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(11) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

(12) נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$

ב. חשבו את $A - (B - C)$

(13) נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$ | ב. $A \cup B$ |
| ג. A^c | ד. $A \cap B^c$ |
| ה. $A^c \cap B$ | ו. $A \cup B^c$ |
| ז. $A^c \cup B$ | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ | |

17 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
 ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.
 ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
 טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
 טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
 איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0 , אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0 .

20 הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21 הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a, b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a, b]$.

22 הוכיחו כי אם $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$, אז $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענו אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענו אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענו אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענו נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענו נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$. ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$.
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$. ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$. ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$.
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C . ב. E, D . ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- (11) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (12) $A \cup B = (-2, 4)$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$

12) א. ϕ ב. $\{4, 5, 6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^c = (-\infty, 1)$ ב. $B^c = [1, 4]$ ג. $C^c = [1, 4]$

ד. $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a, k מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p \mid a \Leftrightarrow p \mid a^k$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי ($n, k, N \in \mathbb{N}$).

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b נסמן $b \mid a$,
ונאמר גם " b מחלק את a ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

(1) נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(2) נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(3) נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

(4) נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$.

- א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את $\sup A$.
 ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את $\inf A$.

(5) נתונה הקבוצה $A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6 נתונה הקבוצה $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\}$

ג. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\}$

ד. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

9 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S . הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.
 ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A , אז לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$, קיים איבר $x \in A$, כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
 ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A , אז לכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$, קיים איבר $x \in A$, כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$.

(11) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס $(-\infty, b)$, (a, b) , $[a, b)$, לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס $(-\infty, \infty)$, (a, ∞) , $[a, \infty)$, לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס $(-\infty, b)$, (a, b) , $[a, b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S = \sup S$.

(12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x \in \mathbb{R}$.

- נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי: $d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$.
- אם $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A , הראו כי $d(\alpha, A) = 0$.

(13) הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.**(14) הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.****(15) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K = \{-x \mid x \in K\}$.
הוכיחו שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.
- ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

(16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T .
הוכיחו כי :

- א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.
- ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.
- ג. $\sup S \leq \sup T$.
- ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S \leq \max T$.

- 17** יהיו A ו- B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.
 א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש- $x < y$.
 הוכיחו כי $\sup A \leq \sup B$.
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$?
 ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $y < x$.
 הוכיחו כי $\sup A = \sup B$.
- 18** נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
 כך ש- $\sup A = \inf B$.
 הוכיחו שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר x ב- A , ומספר y ב- B , כך ש-
 $x + \delta > y$.
- 19** נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$.
 נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר x ב- A , ומספר y ב- B , כך ש- $x + \delta > y$.
 הוכיחו כי $\sup A = \inf B$.
- 20** נניח ש- A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,
 ונניח כי $x < \sup A$.
 הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה A , שנמצאים בין x ל- $\sup A$.
- 21** תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
 הוכיחו כי אם $c \geq 0$, אז ל- $c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.
- 22** יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 הוכיחו כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.
- 23** יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 א. הוכיחו כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.
 ב. הוכיחו כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.
- 24** תהיינה U, T, S קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
 נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \geq s + t$.
 הוכיחו כי $\sup U \geq \sup T + \sup S$.

(25) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. אם S ו- T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T , אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \leq \inf T$.
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \leq \sup S$. האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.
- ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים α, β , המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי n , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

(27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A .

- נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
- הוכיחו כי α הוא הסופרמום של A .

(28) הוכיחו שלכל מס' ממשי c קיים מספר שלם יחיד $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \leq c < m+1$. למספר m קוראים הערך השלם של c , ומסמנים $m = [c]$.**(29) יהיו a ו- b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a - b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n . הוכיחו כי $a = b$.****(30) ענו על הסעיפים הבאים :**

- א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$. הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.
- ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$. הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [a_n, b_n]$.

נניח כי $I_{n+1} \subset I_n$ לכל n .

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1} \subset I_n$ לכל n , וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

(32) לכל n טבעי נגדיר $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = c, \inf A = [c]$
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A = 4$
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A = 7$
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$
- (8) א. $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$. ב. $\min B = 0, \max B = 2$
ג. $\min C = -2, \sup C = 2$. ד. $\inf D = 0, \sup D = 2$

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

קבוצה צפופה

שאלות

- (1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (4) הוכיחו שהקבוצה $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- (5) הוכיחו שהקבוצה $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- (6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:
תת-קבוצה S של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $s \in S$, כך ש- $|s - x| < \varepsilon$.
הוכיחו שאם S תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ קיים $s \in S$, כך ש- $a < s < b$, אז S צפופה ב- $\mathbb{R}$.
- (7) הוכיחו שהקבוצה $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$ צפופה ב- $[0, 1]$.
- (8) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1, \infty)$.
הוכיחו שהקבוצה $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ צפופה בקטע $(0, 1)$.
- (9) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0, 1]$.
הוכיחו שהקבוצה $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$ צפופה בקטע $[0, \infty)$.
- (10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4,
אינה צפופה בקטע $I = [0, 1]$.

11) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1, \infty)$ וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ אינה צפופה בקטע $[0, 1]$.

12) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0, 1]$.

הוכיחו שהקבוצה $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$ אינה צפופה בקטע $[0, 1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

סימן הסכימה

שאלות

(1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \sum_{n=0}^{10} 4^n & \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k & \text{ג.} & \sum_{n=4}^{10} na_n \\
 \text{ד.} & \sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i & \text{ה.} & \sum_{t=1}^8 tx^t & \text{ו.} & \sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \\
 \text{ז.} & \sum_{k=1}^{10} 4n & \text{ח.} & \sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) & \text{ט.} & \sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4)
 \end{array}$$

(2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & 1+2+4+8+16+32+64+128 \\
 \text{ב.} & 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \\
 \text{ג.} & 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\
 \text{ד.} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \\
 \text{ה.} & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 \\
 \text{ו.} & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \\
 \text{ז.} & 5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 \\
 \text{ח.} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\
 \text{ט.} & \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} \\
 \text{י.} & 4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}
 \end{array}$$

(3) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \sum_{k=1}^{10} 4k & \text{ב.} & \sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) & \text{ג.} & \sum_{k=10}^{24} k(k-1) \\
 \text{ד.} & \sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} & \text{ה.} & \sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) & \text{ו.} & \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)
 \end{array}$$

* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה') :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה : } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

תשובות סופיות

- (1) א. $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$
 ב. $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
 ג. $4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$
 ד. $4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$
 ה. $1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$
 ו. $na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$
 ז. $4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$
 ח. $((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$
 ט. $(1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$
- (2) א. $\sum_{k=0}^7 2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} 2k$ ג. $\sum_{k=0}^9 (2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^7 k(k+1)$
 ה. $\sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^7 3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$
 ח. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$
- (3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360 ד. 4360
 ה. 28 ו. 4545
- (4) א. $5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3}(4^{20} - 1)$ ב. $32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$
 ג. $2^{10} \left[\frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$
- (5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) א. $8 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6}$ ב. $4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$

אינדוקציה

שאלות

(1) הוכיחו באינדוקציה כי $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

(2) הוכיחו באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$ ($k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$).

(3) מצאו את ה- n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n \geq n^2$, והוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^n \geq 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x \geq -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$ לכל $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$.

(6) הוכיחו באינדוקציה כי $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, לכל $n \in \mathbb{N}$.
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n \leq 2$

ב. $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$,

אז $a_n = n^2 - 2n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(9) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

(10) הוכיחו באינדוקציה כי $4^n - 1$ מתחלק ב-15, לכל n טבעי זוגי.

$$\textbf{(11)}$$

$$\text{הוכיחו באינדוקציה כי } \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^n = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{array} \right) \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}).$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים x, y המקיימים $x < 1, y > 1$,

$$x + y > xy + 1.$$

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי:

$$\text{אם } a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1, \text{ אז } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad (0 < a_i \in \mathbb{R}).$$

(2) נסחו והוכיחו את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכיחו שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\text{א. } |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{אי שוויון המשולש})$$

$$\text{ב. } |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{ג. } |a - b| \geq |b| - |a|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$

$$\text{ד. } |a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{ה. } |a + b| \geq ||a| - |b||$$

$$\text{ו. } (a_i \in \mathbb{R}) \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את אי שוויון קושי-שוורץ.

$$\text{ב. הוכיחו כי אם } a_1 + \dots + a_n = 1 \text{ אז } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}).$$

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x-56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

תשובות סופיות

(1) $x < 4$ או $x > 8$

(2) $x \leq 7$ או $x \geq 11$

(3) כל x

(4) $x > 3$ או $-3 < x < 1$

(5) $\frac{1}{2} \leq x < 5$

(6) $1 \leq x \leq 6$

(7) $-5 < x < -1$

(8) $2 < x < 6$

(9) $-5\frac{1}{2} < x < -3$

(10) $x < -5$ או $x > 7$

(11) $x < -1$ או $x > 4$

(12) $-3 \leq x < 46$

(13) $x < 0.472$

(14) אין פתרון.

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1 חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב. $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

2 הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב. $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

3 חשבו:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4 הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ב. $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ ג. $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

5 הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

6 רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ לכל $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים:

$$\text{א. } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{ב. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{ג. } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$$

(9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$.

(10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7 . מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x , וחשבו את ערכו.

(12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a = b = 1$.

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15. מצאו את n .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

שדות

שאלות

- 1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על R .
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{aligned} \text{א. } x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ב. } x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ג. } x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned}$$

- 2) נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

- 3) ענו על הסעיפים הבאים:

- הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

- 4) יהיו a, b איברים בשדה.

- הוכיחו כי $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$.
- הוכיחו כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- הוכיחו כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

5) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1) \cdot a = -a$

ב. $(-a)b = a(-b) = -ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $a = c \Rightarrow ab = cb$, לכל a, b, c , בשדה ($b \neq 0$).

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום (ללא ספר)

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1.	תחום הגדרה של פונקציה	30
2.	הרכבת פונקציות	32
3.	הפונקציה ההפוכה	35
4.	פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית	39
5.	פונקציה מחזורית	44
6.	פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית	47
7.	תרגילים משולבים	48

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

(14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל x .

(17) $3 < x < 5$

(18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2 נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x = 3$.

3 נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$.

חשבו $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x = 8$.

4 נתון: $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

5 נתון: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = 2$.

6 נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$.

חשבו $f(g(x))$, $g(f(x))$.

7 נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

מצא את

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.

ג. אם f ו- g על, אז h על.

ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)| < 1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

(13) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

(14) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

(15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- נגדיר $z(x) = (f(x))^n$ כאשר $n > 1$ טבעי.
קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

(16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי $f_{\text{odd}}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x + 1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$.
- ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

(18) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה $f(x) = \cos x$ היא זוגית.
- ב. הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אי-זוגית.
- ג. הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא אי-זוגית.
- ד. הפונקציה $f(x) = \cot x$ היא אי-זוגית.

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

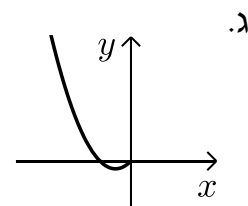
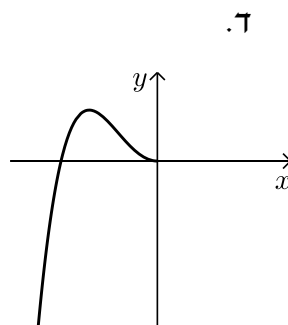
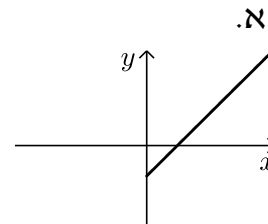
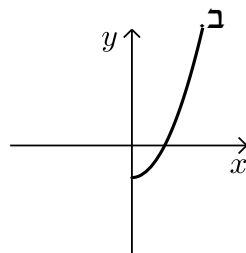
הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

(20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

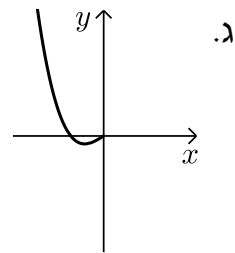
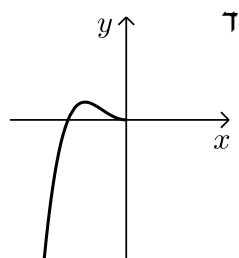
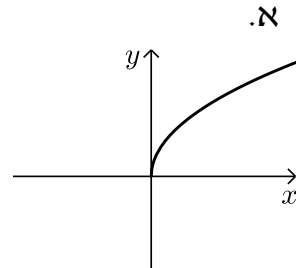
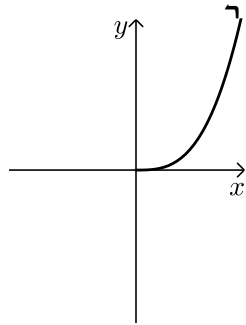
א. $y = \arctan x$

ב. $y = \arcsin x$

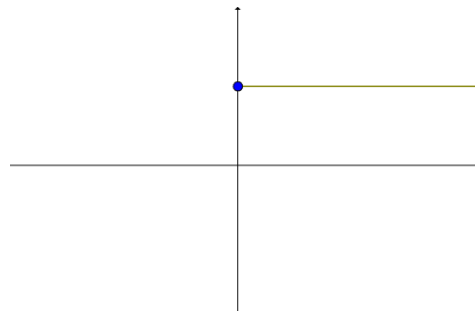
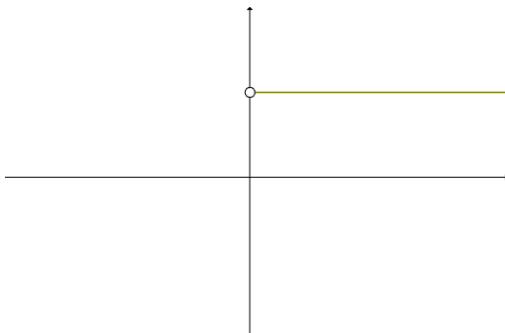
(21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22 הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



23 השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) טענה ב'.

(11) k אי-זוגית, z זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

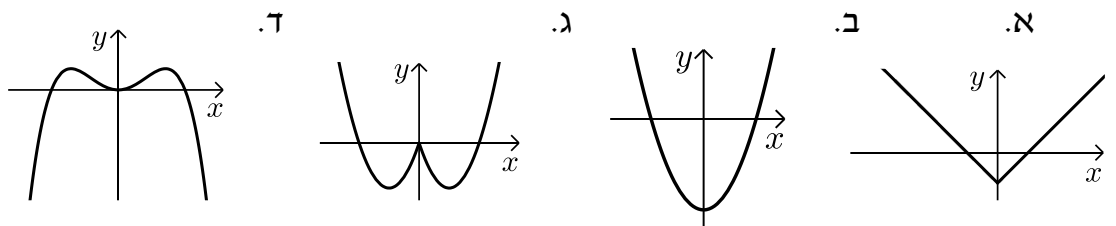
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

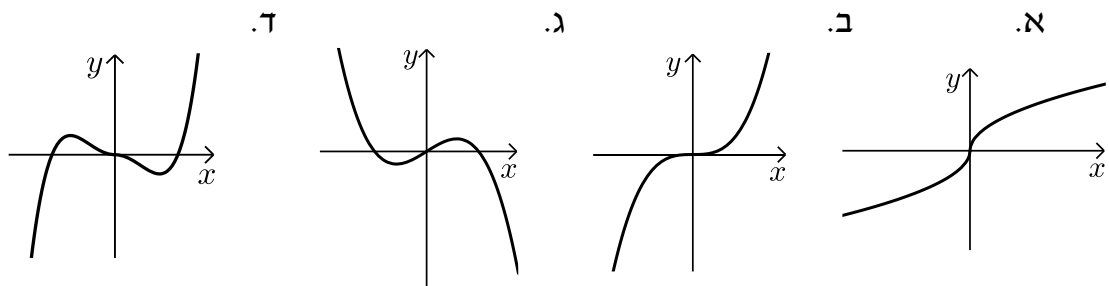
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,

אז $y = a + b \cdot f(cx + d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

(28) הוכיחו : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x + nT) = f(x)$.

(29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) הן מחזוריות.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

- (1) 4π (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π (5) $\frac{\pi}{4}$
- (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) π (8) π (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) π
- (11) 40π (12) π (13) 2π (14) 2π (15) 2π
- (16) π (17) π (18) π

(19) הפונקציה היא למעשה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20) $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

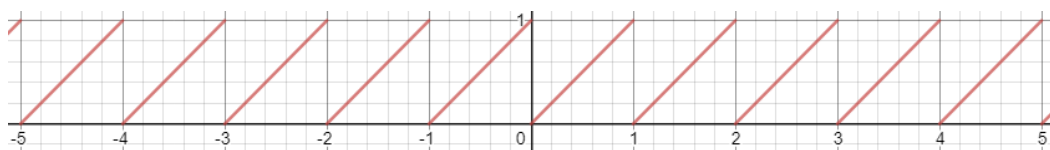
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

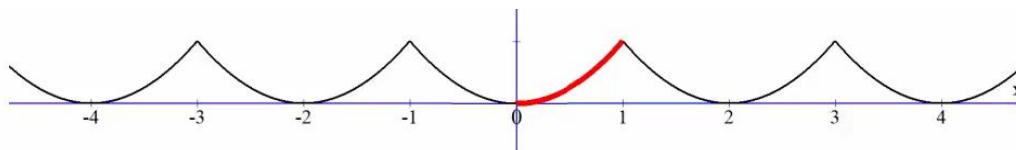
(30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

(31) $g(x) = x - k$, עבור k שלם, זוגי.

(32) $g(x) = (x - k)^2$, עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

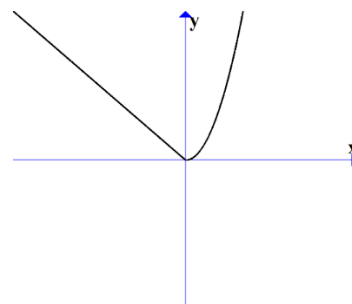
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1)=1$, $f(4)=16$, $f(-4)=4$, $f(0)=0$, $f(7)=\text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

$$(6) \text{ נתונות פונקציות המוגדרות על כל } \mathbb{R}: f(x) = x^3, g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב :

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$,
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה : פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה : אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה : כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$ ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 4 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	52
3. צמצום	53
4. הכפלה בצמוד	54
5. פונקציה שואפת לאינסוף	55
6. איקס שואף לאינסוף	56

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

X שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5
$\frac{1}{4}$ (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	-3 (9
2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13
	0 (19	$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17
(20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.			
$-\frac{1}{2}$ (24	$\frac{1}{2}$ (23	$\frac{k}{2}$ (22	2.5 (21
$\frac{5}{4}$ (28	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27	$\frac{a-b}{2}$ (26	$\frac{1}{2}$ (25
(29) $\ln(6e)$			

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	58
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	62
4. גזירה סתומה	65
5. כלל השרשרת	67
6. גזירה לוגריתמית	70

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. (4) } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. (5) } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. (6) } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ה. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ו. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ז. } f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x)$$

$$\text{א. (7) } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \\ \text{ד. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. (8) } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. (9) } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ה. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ו. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. (10) } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ד. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

גזירה סתומה

שאלות

(1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.

(2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.

(3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

(4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$ חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

(5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$ חשבו את y' בנקודה בה $y = 0$.

(6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - xy = 10$.

(7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - y^x = 1$.

(8) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2 + e^y = x$.
א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

(10) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,
מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

כלל השרשרת

שאלות

(1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.

חשבו את $g'(2)$.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת $z'(x)$

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את $z'(e)$

$$(3) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו $g'(100)$

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

חשבו $g'(1)$.

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$

חשבו $g'(1)$.

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f'''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x) = (f(x))^4$.

קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.

האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

(1) 40

$$(2) \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad z'(e) = 3\frac{3}{4}$$

(3) $\frac{17}{80}$

(4) 36

(5) $\frac{8}{9}$

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 6 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 71
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 74
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 75
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 76
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 77

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5	4 (4	$n-1$ (3	$\frac{20}{17}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1
$\ln \frac{a}{b}$ (10	1 (9	$-\frac{3}{2}$ (8	$\frac{5}{6}$ (7	$\frac{3}{2}$ (6
1 (15	2 (14	$-\frac{1}{2}$ (13	$\frac{1}{6}$ (12	$\frac{1}{2}$ (11
$\frac{1}{2}$ (20	$\frac{1}{6}$ (19	$\frac{a}{b}$ (18	$\frac{a}{b}$ (17	1 (16
$-\frac{1}{2}$ (25	$-\frac{1}{3}$ (24	$\frac{1}{3}$ (23	$\frac{1}{8}$ (22	$\frac{1}{2}$ (21
$\frac{1}{2}$ (30	$\frac{2}{3}$ (29	1 (28	1 (27	$-\frac{3}{4}$ (26
0 (35	∞ (34	0 (33	∞ (32	$\frac{1}{2}$ (31

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	∞ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2)	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)
	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)

תשובות סופיות

e^2 (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	e (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	e^3 (7)	1 (6)
	e (14)	1 (13)	e (12)	1 (11)

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 7 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

78	1. מושגי יסוד
79	2. חקירת פולינום
80	3. חקירת פונקציה רציונלית
84	4. חקירת פונקציה מעריכית
87	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
91	6. חקירת פונקציה עם שורשים
92	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
95	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
99	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x > 9$ or $x < 3$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

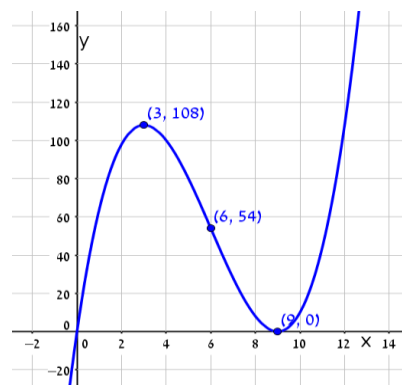
תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x > 1$ or $x < 0$, קעירות: $0 < x < 1$.

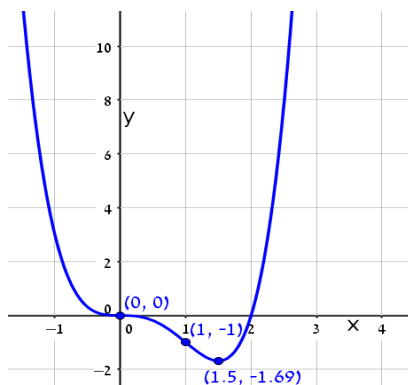
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)



(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $(3, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-3, -\frac{27}{4})$.
תחום עלייה: $x < -3$ or $x > -1$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

(5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .

אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.

תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.

(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.

תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,

ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1, 0)$.

תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.

(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.

תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.

תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.

(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .

אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0, 0)$.

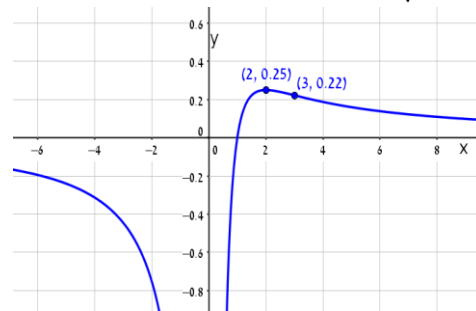
תחום עלייה: $x < -2$ or $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $-2 < x < -1$.

נקודת פיתול: אין.

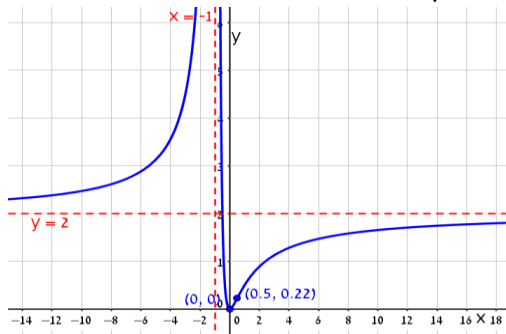
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

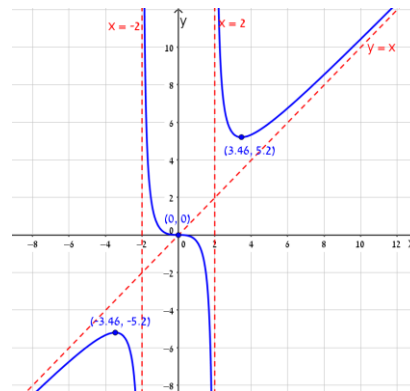
(1)



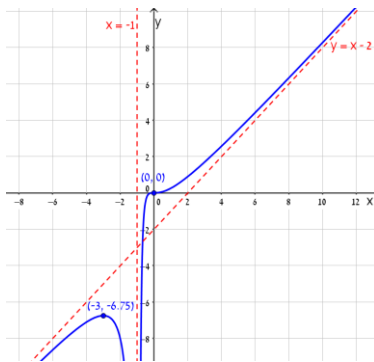
(2)



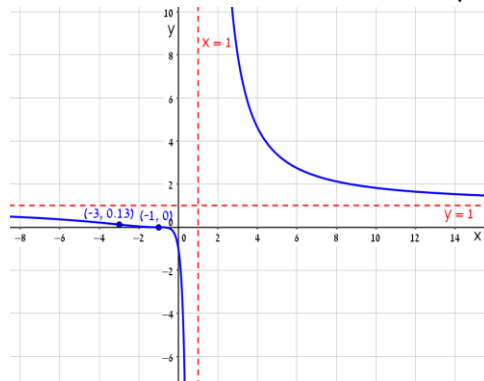
(3)



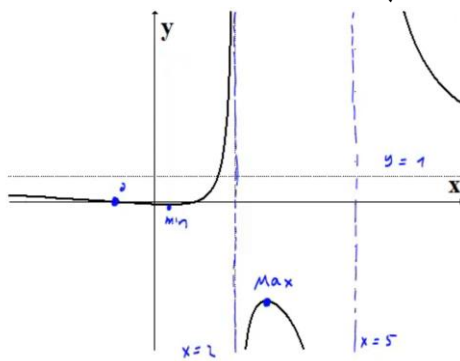
(4)



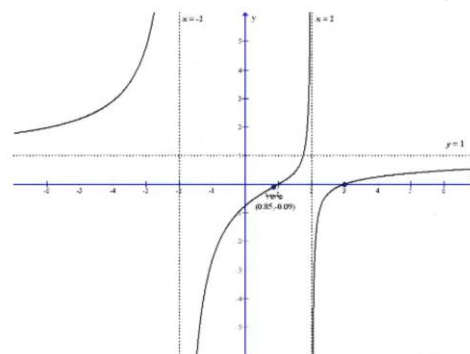
(5)



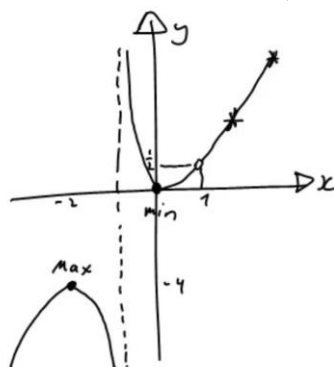
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

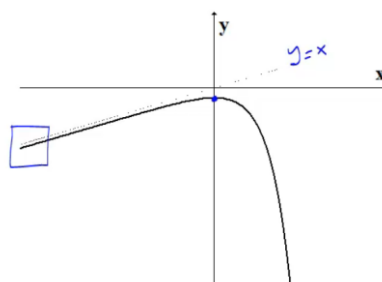
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

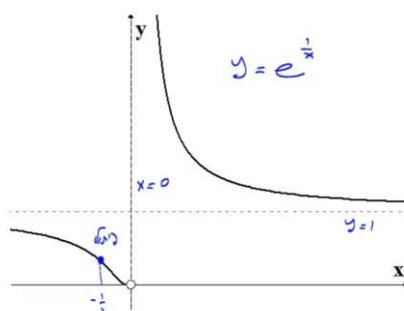
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
 (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
 תחום קמירות: $-0.5 < x < 0$ or $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
 (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 2$ or $0 < x < 2$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
 תחום קמירות: $-0.4 < x < 0$ or $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
 (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
 תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$ or $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$

גרפים

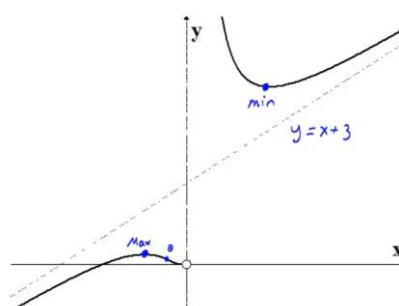
(1)



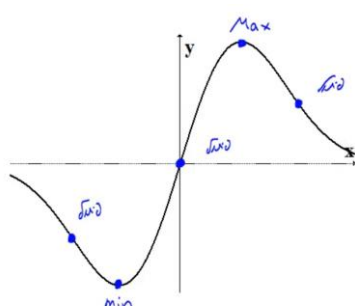
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

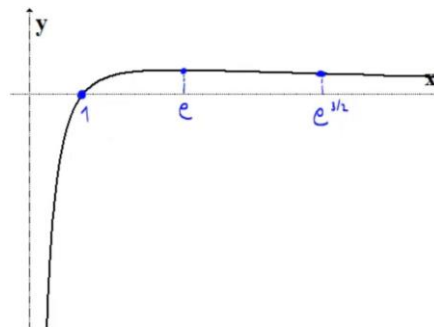
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

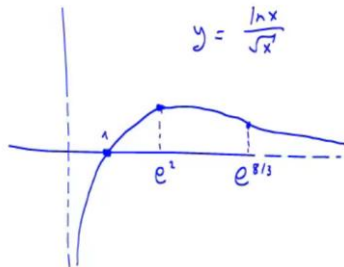
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

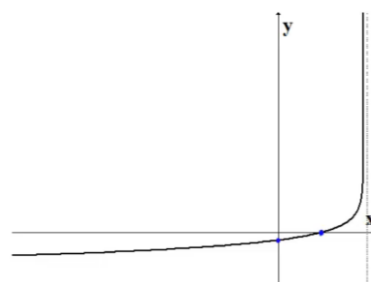
(1)



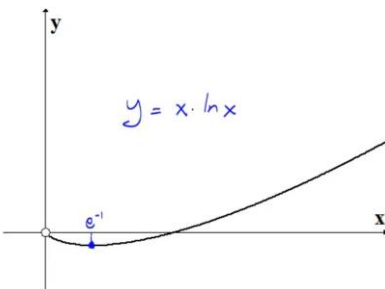
(2)



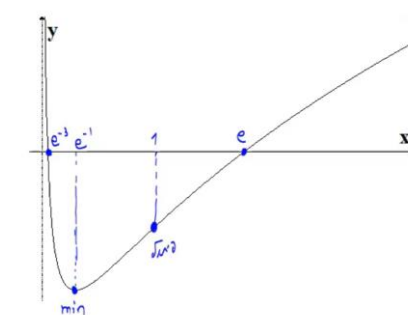
(3)



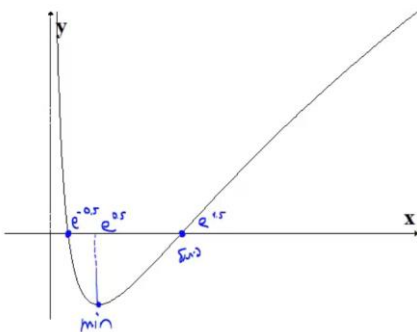
(4)



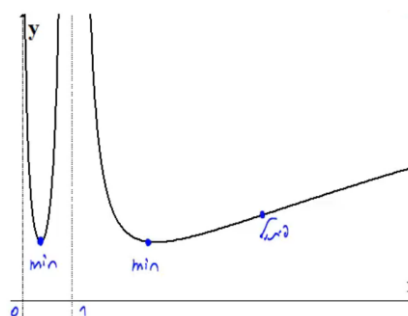
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

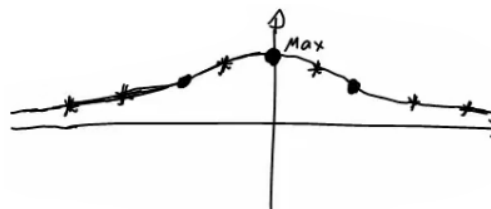
תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

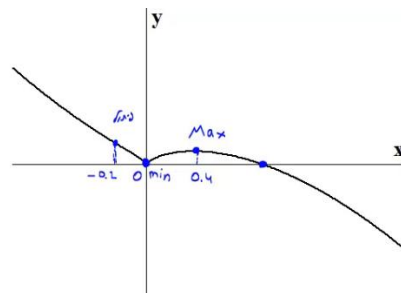
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

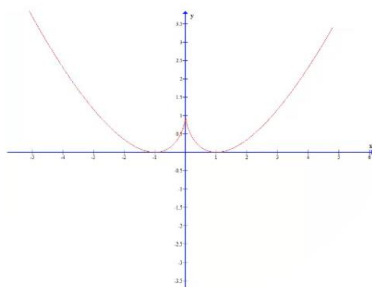
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $0 < x < 1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

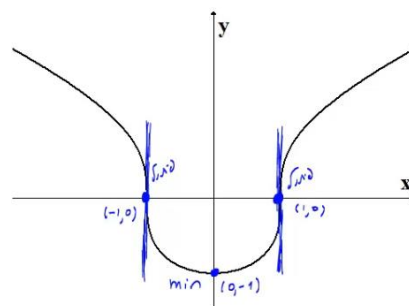
(1)



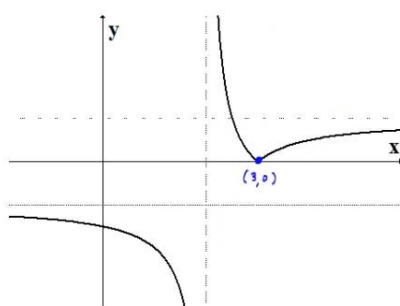
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - מציאת נקודות פיתול.
 - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0, \pi]$.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

(8) $f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3$, $[0, 2\pi]$,

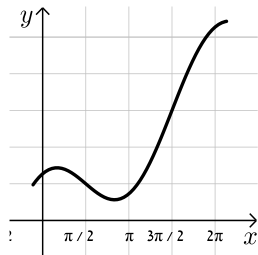
(9) $f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x$, $[0, \pi]$,

תשובות סופיות

(1) א. $0 < x < 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.



ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(2) א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה.

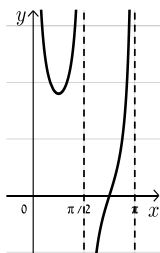
ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.



ד. $(0, 0)$. ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$. ו. $(0, 0)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$,

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



(3) א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

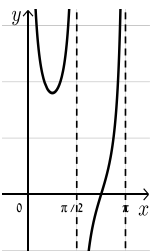
ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

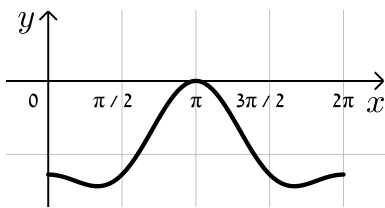
ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

(4) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.

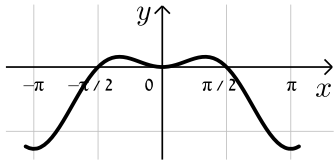
ב. $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right)$, $\max(2\pi, -2)$, $\max(0, -2)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $\max(\pi, 0)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$. גרף:

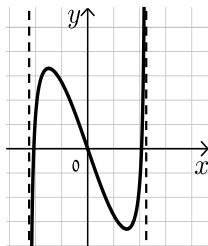




- 5 א. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (0, 1)$
 ב. $(0, 1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$
 ד. 2 פתרונות.

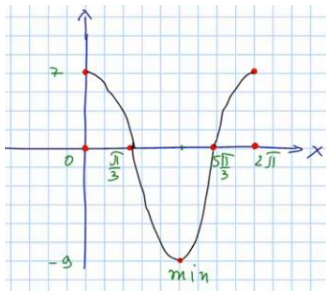


- 6 א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה,
 $\min(0, 0), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ קצה.



- 7 א. $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$
 ג. $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$.

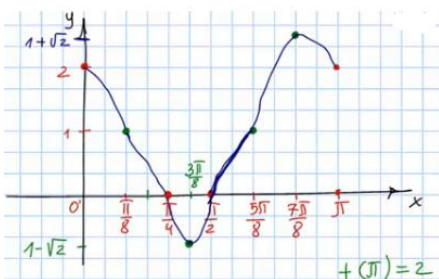
- 8 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7, עם ציר ה- x : $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$
 נקודות קיצון: מינימום: $(\pi, -9)$, מקסימום: $(0, 7), (2\pi, 7)$.



- נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$
 תחום קמירות: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
 קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
 תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 2$ or $2 < x < 3$.

- 9 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2, עם ציר ה- x : $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

- נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2}\right)$
 תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$ or $0 < x < \frac{3\pi}{8}$



- נקודות פיתול: $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$
 תחום קמירות: $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$
 קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

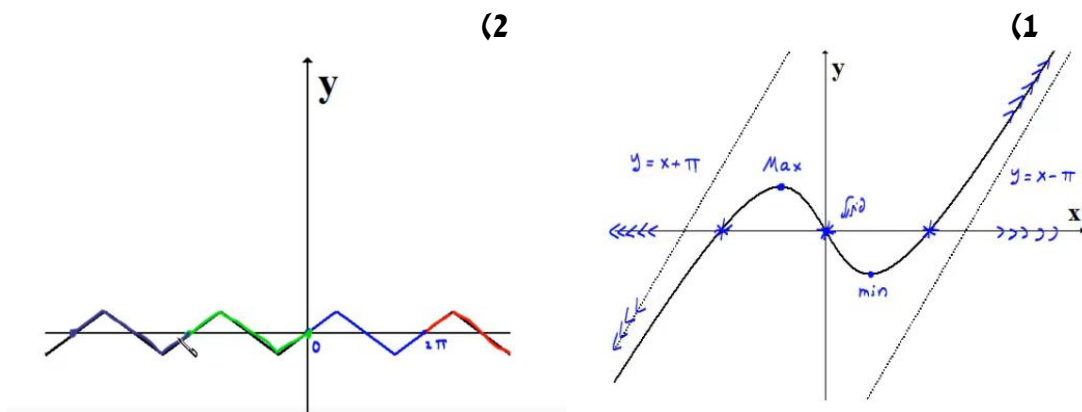
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, 0.575)$, מינימום: $(1, -0.575)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$.
 תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 מחזוריות: כן, ממחזור 2π .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : $x = 0, \pi, 2\pi$.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.
 תחום עלייה: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
 נקודות פיתול: אין.

גרפים



מתמטיקה למדעי החברה

פרק 8 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 101

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \quad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + 1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(30) חשבו את האינטגרל : $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל : $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $$4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$
- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$
- $$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$
- $$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$
- $$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$
- $$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$
- $$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$
- $$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$
- $$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$
- $$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$
- $$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$
- $$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$
- $$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$
- $$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$
- $$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$
- $$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$
- $$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$
- $$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$
- $$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 9 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 104

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|--|--|--|
| $\frac{1}{3} \ln x^3 + 1 + c$ (3) | $\ln \sin x + c$ (2) | $\ln x^2 + 1 + c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x + 1 + c$ (6) | $\ln \ln x + c$ (5) | $-\ln \cos x + c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (9) | $e^{\tan x} + c$ (8) | $e^{x^2} + c$ (7) |
| $\sin(\ln x) + c$ (12) | $\sin(\sin x) + c$ (11) | $\sin(2x^2 + 1) + c$ (10) |
| $-2 \cos(\sqrt{x}) + c$ (15) | $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c$ (14) | $\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c$ (13) |
| $\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$ (18) | $\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c$ (17) | $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (16) |
| $\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$ (21) | $\sqrt{2 \sin x} + c$ (20) | $2\sqrt{x^2 + 1} + c$ (19) |
| $\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (24) | $\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (23) | $\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c$ (22) |

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 10 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....106

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right\} \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 11 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 110

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 12 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 113
- 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 115
- 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 116

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x}^2 \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

מתמטיקה למדעי החברה

פרק 13 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 118

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
- חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$, ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 הוכיחו:

- שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבירו את המשמעות הגרפית.
- שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

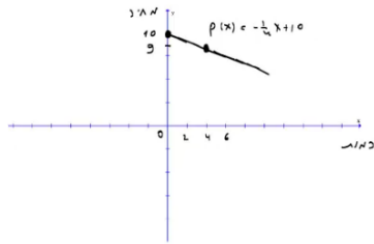
- האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
- האם יתכן להפך?
- הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור. נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה. אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יחידות מג"י 2, המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
 א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

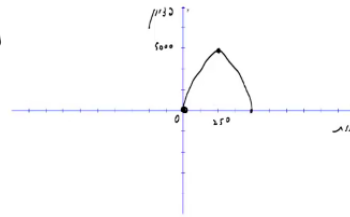
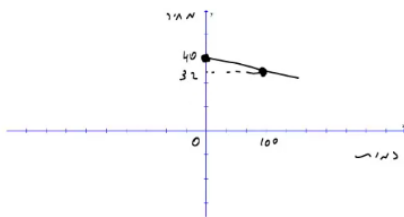
- חשבו את x ו- y עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 3,000$ ₪, $A = 372,000$ ₪.

תשובות סופיות



(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.

(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$ ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

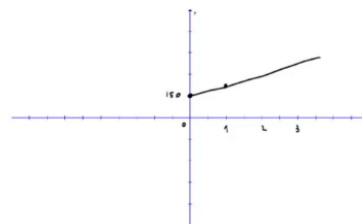
הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא. ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000

(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,
גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(7) א.

(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25

(13) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$